

53. BULGARIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
FINAL ROUND

Second day, May 16, 2004

Problema 4. Într-un cuvânt format din literele a și b sunt posibile schimbările $aba \rightarrow b$, $b \rightarrow aba$, $bba \rightarrow a$, $a \rightarrow bba$. Dacă începem de la cuvântul $\underbrace{aa\dots ab}_{2003}$, este posibil de obținem cuvântul $b\underbrace{aa\dots a}_{2003}$?

Problema 5. Fie a , b , c , d numere naturale nenule astfel încât numărul perechilor (x, y) , $x, y \in (0, 1)$, cu proprietatea că $ax + by$ și $cx + dy$ sunt întregi, este egal cu 2004. Dacă $\text{cmmdc}(a, c) = 6$, aflați $\text{cmmdc}(b, d)$.

Problema 6. Fie p un număr prim și $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m < p$ și $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n < p$ numere întregi oarecare. Notăm cu k numărul resturilor diferite pe care le dau $a_i + b_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ la împărțirea cu p . Demonstrați că:

- (a) dacă $m + n > p$, atunci $k = p$;
- (b) dacă $m + n \leq p$, atunci $k \geq m + n - 1$.

Timp de lucru: 4 ore și 30 minute.